Ejercicio 1

a) Hallar el polinomio de grado mínimo que verifique p(1)=5, p(2)=11 y p'(2)=6 . Justificar el grado del polinomio.

b) Sea la función $S(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x \in [1,2] \\ c + d(x-2) + e(x-2)^2 & x \in (2,4] \end{cases}$.

Queremos que S(x) interpole los datos de la tabla:

x_k	1	2	4
$S(x_k)$	5	11	15

- Determinar los parámetros a, b.
- Determinar c, d, e para que S(x) sea un spline cuadrático.

SOLUCIÓN

a) p(x) es un polinomio de grado 2 (3 condiciones → 3 coeficientes) que tiene que cumplir las condiciones p(1)=5, p(2)=11 y p' (2)=6. El polinomio se puede determinar utilizando el método de Newton:

Tabla de diferencias divididas generalizada:

1	5^*		
2	11	6^*	
2	11	6	0_*

Luego el polinomio es:

p(x)=5+6(x-1)=6x-1

b) Para determinar los **parámetros a, b** trabajamos con el primer tramo de S(x)

Imponemos las condiciones de interpolación:

S(1)=a+b-1=5

S(2)=4a+2b-1=11

Resolvemos y tenemos que a=0 y b=6 , luego el polinomio del primer tramo es

S(x)=6x-1 $x \in [1,2]$

Los parámetros c, d, y e: Para que S(x) sea un spline cuadrado, necesitamos que interpole a los datos (2,11), (4, 15) y que además haya continuidad de la primera derivado para x=2. Resolvemos por el método de Newton para que nos

sea más fácil identificar los parámetros. Necesitamos primero calcular $S'(2^-)=6$ (del subintervalo anterior).

Tabla de diferencias divididas generalizada:

2	11		
2	11	6	
4	15	2	-2

Luego el polinomio de grado 2 para $x \in [2,4]$; es $q(x) = 11 + 6(x-2) - 2(x-2)^2$

Y los parámetros pedidos son: $c=11$ $d=6$ $e=-2$

Ejercicio 2. Se van a ajustar (sentido mínimos cuadrados) los datos de la tabla

xi	1	2	3
yi	1	2	8

por funciones de los tipos que se indican a continuación:

1. Un polinomio del tipo $u(x)=ax^2+x$. En este caso:
- Escribir el sistema sistema lineal sobredeterminado que resulta, indicando la matriz de coeficientes de las incógnitas y el vector de términos independientes.
- Dar las ecuaciones normales y resolver (calcular el valor del parámetro a).
- Si se hubiera considerado el tipo de función aproximante $u(x)=ax^2+bx$, sin hacer los cálculos, justificar si mejoraría la aproximación proporcionada por la función calculada anteriormente.

2. Una función aproximante del tipo $u(x)=\dfrac{ax}{1+bx^2}$. En este caso:
Transformar el problema resultante en un sistema lineal. Dar la matriz de coeficientes de las incógnitas y el vector de términos independientes.

SOLUCIÓN

1) - Se considera una función del tipo $u(x)=ax^2+x$ (se observa que se dispone de un parámetro, a, para ajustar los datos de la tabla). En este caso, se plantea el sistema lineal sobredeterminado: $\begin{cases} u(x_i)=ax_i^2+x_i=y_i \;\Rightarrow\; ax_i^2=y_i-x_i \\ \text{i=1,2,3.} \end{cases}$

Escrito en formato matricial para los datos dados:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}}_{H} a = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}}_{B}$$

- Las ecuaciones normales del sistema vienen dadas por H'Ha= H'B:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}}_{H} a = \begin{pmatrix}1 & 4 & 9\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}}_{B} \rightarrow 98a=45 \rightarrow a=0.4591$$

Por lo tanto, la función pedida es: $p(x)=0.4591x^2+x.$

- El tipo de función considerada anteriormente es un <u>subtipo</u> de la familia de funciones aproximantes $u(x)=ax^2+bx$, donde el parámetro b se asume igual a 1. Por tanto, si se considerasen funciones del tipo $u(x)=ax^2+bx$, en las que se dispone de los dos parámetros a y b para ajustar los datos, se conseguiría una aproximación con un error menor o igual que el de la función obtenida inicialmente.

2) Se considera el ajuste de los datos dados por una función del tipo $u(x)=\dfrac{ax}{1+bx^2}$,

resultando el sistema no lineal $u(x_i)=\dfrac{ax_i}{1+bx_i^2}=y_i$, i=1,2,3. (1)

- A partir de él, un posible sistema lineal resultante sería:

$$ax_i - bx_i^2 y_i = y_i,\ \text{i=1,2,3.}$$

Escrito en forma matricial para los datos dados:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -8 \\ 3 & -72 \end{pmatrix}}_{H}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}}_{B}$$

Por tanto:

- Matriz de coeficientes de incógnitas: $H=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -8 \\ 3 & -72 \end{pmatrix}$

- Vector de términos independientes: $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

- Hay otras posibles intervenciones en las ecuaciones (1) para construir un sistema lineal. Otra forma sería aproximar 1/y por 1/u(x):

$$\frac{1+bx_i^2}{ax_i}=\underbrace{\frac{1}{a}}_{\alpha}\frac{1}{x_i}+\underbrace{\frac{b}{a}}_{\beta}x_i \approx \frac{1}{y_i},\ \text{i=1,2,3.}$$

Llamando $\alpha=\dfrac{1}{a}$ y $\beta=\dfrac{b}{a}$, resultaría el sistema lineal (en las variables α y β):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 2 \\ 1/3 & 3 \end{pmatrix}}_{H}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/8 \end{pmatrix}}_{B}$$

Ejercicio 3: Los números máquina de una representación en coma flotante (base 2) vienen dados por:

$$0.m_1m_2m_3m_4m_5 \cdot 2^{-3} \quad \text{para } e=0$$
$$1.m_1m_2m_3m_4m_5 \cdot 2^{e-4} \quad \text{para } e=1,2,\ldots,7.$$

En los apartados a) y b), después de hacer vuestros cálculos poned los resultados en una tabla resumen como se indica en el enunciado.

a) Para esta representación indicar:

- Número más pequeño con mantisa normalizada:
  $1.00000 \cdot 2$^exp_minimo $= 1.00000 \cdot 2^{-3} = 2^{-3} = 1/8$
- La separación (eps) entre el 1 y el siguiente número máquina.
  $1.00001 - 1.00000 = 0.00001 = 2^{-5} = 1/32$
- La máxima separación entre dos números máquina consecutivos.
  Se dará en los números con exponente máximo =>
  (salto mínimo mantisa)·2^max_exp= $(2^{-5}) \cdot (2^3) = 2^{-2} = 1/4$
- El número (no nulo) más pequeño de la representación.
  Será el más pequeño de los desnormalizados:
  $0.00001 \cdot 2^{-3} = 2^{-5} \cdot 2^{-3} = 2^{-8} = 1/256$

Expresad vuestros resultados en potencias de 2 (p.e. 2^{-1}, 2^{-2}, ...)

Min (norm) = 2^{-3}	eps= 2^{-5}	Max separación = 2^{-2}	Mínimo (>0)= 2^{-8}

b) Sea el número real x=0.3. Obtened el exponente e y mantisa m del número máquina más cercano (para la mantisa dar su expresión en decimal y en binario). Indicar el error relativo de su representación máquina.

$x = 0.3 = 1.2 / 4 = 1.2 \cdot 2^{-2}$ --> e = 2 , mantisa m = 1.2

resto
1.2 --> 0.2
0.4 --> 0.4
0.8 --> 0.8
1.6 --> 0.6
1.2 --> ... y a partir de aquí se repite 1001 m = 1. 001 1001 1001 ...

Redondeando a 5 "decimales" binarios: m = 1.00110 = 1+1/8+1/16 = 1.1875

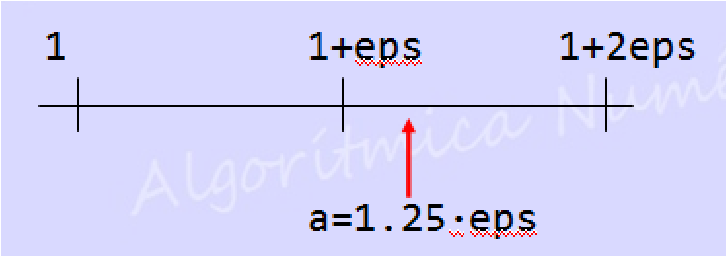
El número máquina guardado es $1.1875 \cdot 2^{-2} = 0.2969$

Error absoluto = |0.2969-0.3|~ 0.0031. Erelativo = 0.0031/|0.3| ~ 0.0104

e=2 $(\cdot 2^{-2})$	m (dec)= 1.1875	m(binario)= 1.00110	Erel= 0.0104

c) Sea a= 0.0390625 = $5\cdot2^{-7}$ (un número máquina dentro de esta representación). Si la representación redondea, justificad (**sin hacer las operaciones**) cuál sería el resultado de hacer (1+a)-1 y dar el error relativo del resultado de la operación.

Comprobamos que a = $5\cdot2^{-7}$ = 5/4·eps =1.25·eps.



Al ser a mayor que eps/2 pero menor que 3·eps/2, el número máquina más cercano a (1+a) es (1+eps). Al restar 1 nos quedamos con eps. Por lo tanto:

$$(1+a)-1= eps = 1/32$$

El resultado correcto sería obviamente a, por lo que el error relativo es:

$$Erel = |eps-a|/|a| = |eps/a -1| = |4/5 - 1| = 1/5 = 0.20$$